

BÀI TOÁN GIỚI HẠN DÃY SỐ LUYỆN THI OLYMPIC SINH VIÊN

Nguyễn Thu Hằng

Bộ Môn Toán
Khoa Khoa học cơ bản

01/2020

Nội dung báo cáo

- 1 Kiến thức cơ sở về dãy số
- 2 Một số bài toán về dãy số
- 3 Bài tập luyện tập

Kiến thức cơ sở về dãy số

- 1 Các định nghĩa
- 2 Các tiêu chuẩn hội tụ

Một số bài toán về dãy số

- ➊ Dạng 1. Những dãy số liên quan đến tổng các số hạng liền trước
- ➋ Dạng 2. $u_{n+1} = f(u_n)$
- ➌ Các dãy truy hồi đặc biệt
 - Dãy $u_{n+1} = a.u_n^2 + b.u_n + c$
 - Dãy số phân tuyến tính $x_{n+1} = \frac{ax_n + b}{cx_n + d}$.
- ➍ Định lý Toeplitz và định lý Stolz

Dạng 1. Những dãy số liên quan đến tổng các số hạng liên trước

Ví dụ .

Cho dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định như sau

$$x_1 = 2$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = n^2 \cdot x_n.$$

Tính x_{2016} .

Dạng 2. $u_{n+1} = f(u_n)$

- 1 Nếu f là hàm đơn điệu tăng thì $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1})$, nên ta thấy $u_{n+1} - u_n$ cùng dấu với $u_1 - u_0$. Như vậy dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ đơn điệu tăng hoặc giảm phụ thuộc vào u_1 và u_0 . Trong trường hợp này chỉ còn phải xét xem $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ bị chặn trên hay bị chặn dưới hay không.
- 2 Nếu f là hàm đơn điệu giảm thì $f \circ f$ là hàm tăng. Vậy hai dãy con $\{u_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ và $\{u_{2k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ đều đơn điệu tăng hoặc giảm phụ thuộc vào dấu của $u_4 - u_2$ và $u_3 - u_1$. Hơn nữa $u_4 - u_2 = f(u_3) - f(u_1) > 0$ nếu $u_3 < u_1$ và $u_4 - u_2 = f(u_3) - f(u_1) < 0$ nếu $u_3 > u_1$ do f nghịch biến. Vậy nên hai dãy con $\{u_{2k}\}_{k=1}^{\infty}$ và $\{u_{2k+1}\}_{k=1}^{\infty}$ đều đơn điệu ngược chiều nhau
- 3 Nếu f là hàm liên tục là $\lim u_n = l$ thì suy ra $f(l) = l$. Ta có thể giải phương trình $f(l) = l$ để tìm giới hạn dãy số

Dạng 2. $u_{n+1} = f(u_n)$

Mệnh đề .

Cho f khả vi trên \mathbb{R} . Giả sử tồn tại các số $p > 0$ và $q \in (0, 1)$ sao cho $|f(x)| \leq p$ và $|f'(x)| \leq q$. Khi đó dãy số $x_0 = a, x_{n+1} = f(x_n)$ hội tụ.

Các dãy truy hồi đặc biệt

Dãy $u_{n+1} = a.u_n^2 + b.u_n + c$

Xét hàm $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Nếu $f'(x) > 0$ thì $f(x)$ đồng biến và do đó dãy đơn điệu. Trong trường hợp này ta chỉ cần chứng minh dãy bị chặn. Chú ý rằng nếu dãy có giới hạn L thì sẽ là nghiệm của phương trình $L = a.L^2 + b.L + c$. Ta có thể dựa vào phương trình này để chứng minh dãy bị chặn (bởi chính nghiệm của phương trình đó) hay không bị chặn.
- Nếu $f'(x)$ đổi dấu thì ta xét xem liệu có tồn tại $c \in (0, 1)$ sao cho $|f'(x)| < c$ hay không. Nếu tồn tại c như trên thì bài toán cũng được giải quyết

Các dãy truy hồi đặc biệt

Dãy số phân tuyến tính $x_{n+1} = \frac{ax_n + b}{cx_n + d}$.

Xét phương trình $L = \frac{a.L + b}{c.L + d} \Leftrightarrow cL^2 + (d - a)L - b = 0$ có

$$\Delta = (d - a)^2 + 4bc.$$

- Nếu $\Delta < 0$, dãy phân kỳ.
- Nếu $\Delta > 0$, phương trình có hai nghiệm phân biệt α, β .
 - Nếu $x_1 = \alpha$ thì $x_n = \Delta, \forall n$.
 - Nếu $x_1 \neq \alpha$, đặt $X_n = \frac{x_n - \beta}{x_n - \alpha}$, ta được $X_{n+1} = \lambda X_n$
- Nếu $\Delta = 0$, phương trình có nghiệm kép λ . Đặt $X_n = \frac{1}{x_n - \lambda}$ ta được $\{X_n\}$ là cấp số cộng.

Định lý Toeplitz và định lý Stolz

Định lý .

(Định lý Toeplitz) Cho $\{c_{n,k}\}$ là một bảng các số thực thỏa mãn

- 1 $c_{n,k} \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty, \forall k \in \mathbb{N}$.
- 2 $\sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} \rightarrow 1$ khi $n \rightarrow \infty$.
- 3 Tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho với mọi số nguyên dương n thì

$$\sum_{k=1}^n |c_{n,k}| \leq C.$$

Khi đó mọi dãy hội tụ $\{a_n\}$ thì dãy $\{b_n\}$ xác định bởi $b_n = \sum_{k=1}^n c_{n,k} a_k$ cũng hội tụ và $\lim b_n = \lim a_n$.

Định lý Toeplitz và định lý Stolz

Hệ quả .

- ① Nếu $\lim a_n = a$ thì $\lim \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = a$.
- ② Nếu $\lim a_n = +\infty$ thì $\lim \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = +\infty$.

Định lý Toeplitz và định lý Stolz

Định lý .

(định lý Stolz) Cho $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ và $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ là hai dãy thỏa mãn:

① $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy tăng thực sự đến $+\infty$.

② $\lim \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = g$.

Khi đó $\lim \frac{x_n}{y_n} = g$.

Hệ quả .

Lấy $y_n = n$, khi đó

① Nếu $\lim(x_{n+1} - x_n) = a$ thì $\lim \frac{x_n}{n} = a$.

② Nếu $\lim \left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} \right) = a$ thì $\lim \frac{1}{n \cdot x_n} = a$.

Kết luận

Báo cáo đã trình bày tóm tắt lý thuyết về dãy số và đưa ra một số dạng bài tập quen thuộc trong luyện thi olympic sinh viên phần dãy số, đồng thời đưa ra một vài cách giải tổng quát, dễ hiểu. Đây là một tài liệu có thể giúp sinh viên ôn tập phần giới hạn dãy số tốt hơn.

Trong tương lai, để hoàn thiện giáo án luyện thi olympic môn giải tích, tôi sẽ cố gắng tổng hợp thêm nhiều dạng bài, đưa ra nhiều cách giải tổng quát giúp sinh viên dễ tiếp cận hơn.

Tài liệu tham khảo



W.J.Kaczknor - M.T. Nowak, *Bài tập giải tích I*, NXB Đại học Sư Phạm Hà Nội, 2003.



Kỷ yếu kỳ thi Olympic Toán Sinh viên các năm 2015, 2016, 2017, 2018.